

三维寄生电感提取中一种多右端方程求解方法

杨 柳, 郭小波, 王泽毅

(清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

摘 要: 本文介绍应用 PEEC 模型提取 VLSI 电路中 3D 互连寄生电感电阻中出现的多右端线性方程组求解问题. 在种子投影多右端方程求解方法 EGCR^[5] 的基础上, 本文提出一种改进的 EGCR 方法 MEGCR, 达到有控制地扩大搜索空间以减少所需正交化时间的目的. 它显著加快了多右端方程组的求解速度, 在可比精度下, 右端数约为 30 时, 综合运用多右端技术及多极加速的本文方法比先进的 FastHenry^[1] 快数十倍.

关键词: 3D 寄生电感; PEEC 模型; 多极加速; 多右端线性方程组

中图分类号: TN384 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2004) 12-1772-04

An Approach to Solving the Linear Systems with Multiple Right Hand Sides in 3D Parasitic Inductance Extraction

YANG Liu, GUO Xiaobo, WANG Ze2yi

(Dept. of Computer Science & Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: We discuss the problems of solving linear systems with multiple right hand sides while using PEEC model to extract 3D parasitic interconnect inductance and resistance in VLSI circuits. Based on the seed projection method EGCR (Extended Generalized Conjugate Residual)^[5], we propose a modified method MEGCR to simplify the computation of orthogonal procedure through limitly enlarging the search space of nonseed right hand sides. It accelerates the speed of solving systems with right hand sides. Summarizing the technique of solving linear systems with multiple right hand sides and multiple acceleration, our program runs faster than FastHenry^[1] tens. times with comparable accuracy when the number of right hand sides is about 30.

Key words: 3D parasitic inductance; PEEC; multiple acceleration; linear systems with multiple right hand sides

1 引言

VLSI 电路已普遍使用 0.13 微米特征尺寸及 67 层布线技术, 时钟频率已高达 3GHz 以上, 依赖频率的互连寄生电感电阻与电容一样, 对电路时延、功耗、信号失真及可靠性等产生越来越大的影响. 因此, 精确快速的寄生电感电阻提取对高性能电路设计具有关键意义^[1]. 目前, 依赖频率的三维互连寄生电感电阻提取主要有: 体积元方法^[1, 2] 和边界元方法. 前者较为成熟, 已广泛应用于实际计算. 七十年代由 IBM 公司 Watson 研究中心 Ruehli 等人引进互连电感电阻电容提取的 PEEC (Partial Element Equivalent Circuit)^[2] 模型以及著名软件 RAPHAEL 与 FastHenry^[1] 使用的都属于体积元方法. 它们精度高, 稳定性好. 近年来, 多种快速算法被应用于体积元方法中, 使计算速度得到显著提高. FastHenry 采用基于均匀立方体划分的多极加速计算技术. 但文 [6] 指出, 在粒子分布严重不均匀时, 非均匀立方体划分往往能比均匀立方体划分更有效的控制近场计算量. 为此, 本文采用一种改进的非均匀立方体划分多极加速算法^[6].

对一个多端口对三维互连结构, 为了得到完整阻抗矩阵, 电感电阻提取成为一个多右端方程组求解问题. 目前, 求解多右端线性系统的方法大致分为三类. 第一类是块方法, 第二类

是全局方法. 这两类方法比较适合于具有良好稀疏性的多右端系统, 对电感提取的满阵多右端系统并不合适. 第三类是基于种子的投影方法, 它由 Smith^[3] 等人较早提出, Chan 和 Wang^[4] 给出了相关的理论分析. 文 [4] 指出, 与 CG、GCR^[7] 等一般的迭代法相比, 种子方法具有超收敛性. 而且, 当各右端相互靠近时, 通常只需很少迭代次数即可解出所有右端. Ligen 基于投影方法的思想提出了一种 EGCR (Extended Generalized Conjugate Residual)^[5], 其思想是通过扩大方程解的搜索空间以减少迭代次数. 本文以 EGCR 为基础并作改进, 较大提高了计算速度. 同时, 与未采用多右端求解技术的 FastHenry 相比, 对具中等规模端口对数目 (比如 ~ 30) 的三维互连结构, 综合运用了多右端求解技术及改进非均匀立方体划分多极加速的本文方法可有数十倍加速.

第二和第三节介绍体积元方法和基于种子的投影方法, 第四节介绍 EGCR 方法, 第五节介绍 MEGCR 方法, 第六节给出数值结果并作分析. 第七节为结论.

2 体积元方法

根据磁准静态假设, 导体内电流可看作仅沿平行于导体侧表面的方向流动, 即在导体侧表面无自由电荷聚集. 为了精确考虑高频下的邻近和趋肤效应, 可将导体离散化成一束矩

形横截面的电流细丝, 并设细丝上电流仅沿长度方向流动. 离散化后细丝的电流与电压有如下关系:

$$Zb = V_b \quad (1)$$

$$Z = R + jXL \quad (2)$$

其中, I_b , V_b 分别为细丝的电流和电压, Z 为细丝阻抗, X 是频率, R I $R^b @ b$ 的对角线元素为细丝直流电阻, L I $R^b @ b$ 是稠密的部分电感对称矩阵.

根据 Kirchoff 电压定律, 离散系统对应电路的节点电压有

$$MV_b = V_s \quad (3)$$

而网孔中的电流满足 $M^T I_m = I_b$ (4)

其中, M 为离散电路的网孔矩阵, 上标 T 表示转置, I_m I C^m 为网孔电流向量.

将式(3)与(4)代入式(1), 得到 $MZM^T I_m = V_s$ (5)

用迭代法求解方程(5), 就可以计算出导体阻抗.

3 投影方法

对于一个含 s ($s < n$) 个端口对的结构, 若要得到各端口对间依赖频率的阻抗复矩阵 $Z(X)$, 需逐次在第 i ($i = 1, \dots, s$) 个端口对设置 1 伏电压, 其余端口对设置 0 伏电压, 以得到 $Z(X)$ 的第 i 列. 也就是说, 问题成为求解如下多右端线性系统:

$$AX = B \quad (6)$$

其中, A I $C^{n @ n}$ 是稠密的对称复矩阵, $B = [b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(s)}]$ 为待解右端列向量组成的长方形阵.

GCR (Generalized Conjugate Residual)^[7] 是基于 Krylov 子空间的一种重要迭代方法, 在大型线性系统求解中得到广泛应用, 其中包括 32D 寄生电容提取, 并应用于本文的电感电阻提取. 在电感电阻提取中, 所形成线性方程组的系数矩阵是稠密的, 这使 GCR 迭代过程中每一次矩阵- 向量乘的计算量远大于正交化及其它所需计算量. 因此, 在电感电阻提取的多右端线性系统求解中, 为提高计算速度, 必须有效减少迭代过程所需矩阵- 向量乘的总次数, 而基于种子的投影方法具备这种优良性质.

在使用迭代法时, 一个好的初始解, 往往能有效减少迭代次数从而提高收敛速度. 1989 年, Smith 等人在应用共轭梯度法 CG (Conjugate Gradient) 求解多右端线性系统中提出了基于种子的投影方法. 它的主要思想是: 从所有右端中选出一个作为种子 (seed), 并用一般的迭代法求解该种子系统, 然后将余下右端产生的剩余用 Galerkin 方法投影到种子系统求解过程已形成的 Krylov 子空间中, 可得到非种子右端的近似解. 其算法描述如下: (1) 从所有未解右端中选择一个右端作为种子; (2) 用 CG 求解种子系统, 形成相应搜索空间 $\{V\}$; (3) 计算其余未解非种子系统的剩余, 并将剩余投影至种子系统形成的搜索空间 $\{V\}$; (4) 通过投影得到未解非种子右端的近似解, 并用作下次迭代的初始解; (5) 重复步骤 1~ 4, 直至所有右端求解完毕.

投影方法之所以能够加速多右端问题的求解速度, 其原因在于: 对于未解非种子右端系统, 将其剩余投影至种子系统形成的搜索空间, 可使剩余在这个搜索空间内极小化, 进而得到一个优于投影前的近似解作为该右端下次迭代的初始解.

基于投影的思想, 随后很多人将它应用于其它迭代方法中, 如 GMRES、QMR 等. 数值结果和理论分析表明, 投影方法相对一般迭代方法具超收敛性.

4 EGCR 方法

Ligen 基于投影方法的思想, 对 GCR 方法加以扩展, 提出了 EGCR (Extended Generalized Conjugate Residual)^[5] 方法加速多右端问题求解. 对 GCR 而言, EGCR 方法作了以下两点扩展: (1) 基于 Smith 所提出投影方法的思想, 通过将待解右端的剩余投影至已解右端形成的搜索空间, 得到待解右端的初始解; (2) 在构造待解右端的搜索空间时, 将其与已解右端形成的搜索空间正交化, 从而扩大了待解右端搜索空间并提高了迭代的收敛速度. 其算法描述如下: (1) 从未解右端中选择一个右端作为种子, 用 GCR 方法求解, 形成相应搜索空间 $\{V\}$; (2) 从其余未解右端中选择下一个待解右端; (3) 计算该待解右端的剩余, 并将剩余投影至搜索空间 $\{V\}$, 得到的近似解作为迭代求解的初始解; (4) 与 $\{V\}$ 正交化形成待解右端的搜索空间 $\{W\}$; (5) 合并 $\{W\}$ 与 $\{V\}$, 合并后空间记为 $\{V\} = \{W\} + \{V\}$; (6) 将合并后的空间 $\{V\}$ 作为待解右端搜索空间, 进而求解该右端; (7) 重复步骤 2~ 6 直到所有右端求解完毕.

由以上算法描述看出, 与 Smith 的投影方法不同, EGCR 方法不仅使用了投影技术得到待解右端的初始解, 同时通过与已解右端形成的搜索空间正交化, 从而增加了待解右端搜索空间的维数. 搜索空间的扩大降低了求解待解右端的迭代次数. 数值实验结果的确表明, 待解右端的迭代次数随着已解右端数的增加而降低.

5 MEGCR 方法

将 EGCR 应用于电感提取时, 有以下两个缺点被注意到: 第(1), 正交化过程中向量内积次数与搜索空间的维度成正比, 随着搜索空间的扩大, 每次迭代中用于正交化的时间也会逐步增加, 当搜索空间维数增加到一定程度时, 它能带来的好处将被正交化所需时间的增加所淹没; 第(2), 随着搜索空间不断扩大, 正交化的次数逐步增多, 大量的计算误差会使基的正交性下降, 影响迭代的收敛速度. 下面我们给出 GCR 和 EGCR 两种方法的计算量, 通过分析 EGCR 方法计算量与右端数的关系说明上述结论, 进而提出一种改进的 MEGCR 方法.

假设(6)中矩阵 A 的阶数为 n , 右端数为 s . GCR 及 EGCR 迭代算法的每一次迭代计算包括三部分: 正交化过程形成新的基向量、矩阵2向量乘和求近似解. 其中, 求近似解的计算量很小, 仅少数几次向量内积, 可在下面的讨论中忽略. 正交化过程的计算量与当前搜索空间的维度成正比. 由于本文采用多极加速技术, 迭代中每次矩阵2向量乘计算量为 $O(n \log_2 n)$, 也就是 $kn \log_2 n$, 其中 k 为常数. 为了方便, 在后面的讨论以及公式(7)~ (9)中令. 假设用 GCR 算法求解每个右端所需迭代次数平均为 m , 而使用 EGCR 算法后每个右端的平均迭代次数减少为 p , p 是与右端数 s 相关的一个函数, $p = f(s)$. 一般来说, 它随 s 的增加而减少. 注意, 应用 GCR 和 EGCR 算法时, 种子求解过程所需的迭代次数一般较非种子的多, 但为讨论

方便,引入了平均迭代次数的概念,即将种子求解等同于一般非种子求解.这样,用 GCR 求解 s 个右端的计算量为(以 n 维的向量内积为单位):

$$\begin{aligned} T_{\text{GCR}} &= T_{\text{矩阵} \times \text{向量乘}} + T_{\text{正交化}} \\ &= s[mk \log_2 n + (1 + 2 + \dots + m)] \\ &= s[m \log_2 n + \frac{m(m+1)}{2}] (\text{令 } k=1) \end{aligned} \quad (7)$$

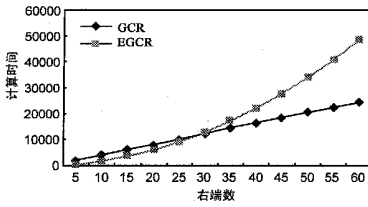
其中,第一部分为矩阵 \times 向量乘计算量,第二部分为搜索空间正交化计算量.而用 EGCR 算法求解 s 个右端的计算量为:

$$\begin{aligned} T_{\text{EGCR}} &= T_{\text{矩阵} \times \text{向量乘}} + T_{\text{正交化}} \\ &= spk \log_2 n + (1 + 2 + \dots + sp) \\ &= sp \log_2 n + \frac{sp(sp+1)}{2} (\text{令 } k=1) \end{aligned} \quad (8)$$

由于 EGCR 方法采用了投影技术以及增加了搜索空间的维数,因此 EGCR 方法的平均迭代次数小于 GCR 方法的平均迭代次数,即 $p < m$. 观察比较公式(7)和(8),两种方法的计算量均可分为矩阵 \times 向量乘和搜索空间正交化两部分.先比较矩阵 \times 向量乘部分,由于 $p < m$,因此 EGCR 的矩阵 \times 向量乘所需时间小于 GCR,即 $sp \log_2 n < sm \log_2 n$.再比较搜索空间正交化部分,GCR 的计算时间随右端数 s 的增加线性增加,而 EGCR 的计算时间随右端数 s 的增加呈平方增加.因此当右端数增加到一定值时,EGCR 中该部分的计算时间将超过 GCR 的计算时间,进而淹没矩阵 \times 向量乘部分计算时间的减少,使得总计算时间也超过 GCR.以 $n=1024, m=20, p=5$ 为例,可画出两种方法的计算时间随右端数增加的变化曲线.

由图 1 看出,当右端数增至 30 时,GCR 与 EGCR 的计算时间相近,而当右端数增至 60 时,EGCR 的计算时间为 GCR 的两倍左右.其原因在于搜索空间正交化的计算量随右端数的增加而增加.因此,为了提高 EGCR 的有效性,须减少搜索空间正交化的计算量.

图 1 GCR 方法与 EGCR 方法计算时间随右端数增加的变化曲线



下面介绍所提出改进的 EGCR 算法 MEGCR (Modified Extended Generalized Conjugate Residual). 选出第一个右端作为种子,用 GCR 求解并得到 Krylov 子空间的一组基,再将非种子右端的剩余向已求解右端形成的搜索空间投影得到一个初始解,但在形成非种子右端的搜索空间时,仅与种子右端的 Krylov 子空间正交化,而不是与所有已解右端的搜索空间正交化,从而大大减少正交化所需计算量.改进的 EGCR 算法描述如下:

- (1) 选择第一个右端作为种子并选择初始解.
- (2) 用 GCR 方法求解种子右端,形成相应的 Krylov 子空间,记为 $\{V\}$.
- (3) 将空间 $\{V\}$ 赋值至投影空间 $\{P\} = \{V\}$.
- (4) For $i = 2$ to s do
 - (a) 将第 i 个右端的剩余投影至投影空间 $\{P\}$,得到相

应的一个初始解.

- (b) 与种子右端的搜索空间 $\{V\}$ 正交化,形成第 i 个右端的搜索空间 $\{W\}$.
- (c) 合并 $\{W\}$ 与 $\{V\}$,将合并后的空间作为第 i 个右端的搜索空间,进而求解该右端.
- (d) 将第 i 个右端形成的新搜索空间 $\{W\}$ 合并至投影空间 $\{P\} = \{P\} + \{W\}$.

(5) End for

假设使用 MEGCR 算法后每个右端的平均迭代次数减少为 $q, q = g(s)$. 一般来说,它也随 s 的增加而减少.下面给出改进后算法 MEGCR 的计算复杂度:

$$\begin{aligned} T_{\text{MEGCR}} &= T_{\text{矩阵} \times \text{向量乘}} + T_{\text{正交化}} \\ &= sqk \log_2 n + s(1 + 2 + \dots + 2q) \\ &= sq(\log_2 n + 2q + 1) (\text{令 } k=1) \end{aligned} \quad (9)$$

MEGCR 通过有效限制扩大 Krylov 子空间所需正交化计算量,继承了 EGCR 方法中通过扩大搜索空间加速迭代收敛速度的优点,同时克服了由于其正交化时间随右端数增加而急剧增加的缺点.

GCR 方法的误差分析在文[7]中已经给出了结论和证明:

引理 1 GCR 迭代求解第 m 步的剩余为

$$+ r_m + 2F \min_{q_m, P_m} + q_m(A) + \# + r_0 + 2$$

其中 P_m 为 m 次多项式.

根据文[7]对 GCR 方法的误差分析,我们能够得到 MEGCR 方法的误差估计,如下:

引理 2 假设种子右端形成的搜索空间为 $\{V_m\}$,那么对于第 i 个非种子右端,MEGCR 迭代求解第 1 步的剩余为

$$+ r_1 + 2F \min_{q_{m+1}, P_{m+1}} + q_{m+1}(A) + 2\# + r_0 + 2$$

其中 P_{m+1} 为种子右端搜索空间与第 i 个非种子右端形成的 1 维搜索空间合并后的新搜索空间中的 $m+1$ 次多项式.

根据文[7]中引理 1 的证明,我们能够推导出引理 2,其区别仅在于由于搜索空间维数的不同,多项式的次数也从 m 次变成了 $m+1$ 次.

值得指出的是,在后面的数值结果比较中,由于三种迭代方法 GCR、EGCR 和 MEGCR 的迭代收敛判据都一样,因此计算结果的误差也都一样,这一点通过最后得到的计算结果相差无几上可以看出.

6 数值结果与分析

计算程序用 C++ 语言编写,名为 FIE(Fast Inductance Extraction),在 Sun Fire 880 工作站运行.著名电感提取软件 Fa2Henry 是 MIT 的 VLSI 小组开发完成的.该组的主页(<http://rl2vlsi.mit.edu>)提供了一些实际例子,我们从中选出一些用作数值比较.

6.1 GCR、EGCR 和 MEGCR 的比较

从 FastHenry 提供的例子中可选出几个具有多右端的例子,分别用 GCR、EGCR 以及 MEGCR 方法进行计算.频率为 1G.从表 1 看出,三种方法得到的计算结果相差无几,而 MEGCR 方法的迭代次数与解方程时间较 GCR 法有较大提高. MEGCR 的迭代次数与 EGCR 方法相当,但在解方程时间上明显

表 1 GCR, EGCR 和 MEGCR 三种方法的比较(频率为 1GHz)

		右端数	迭代次数	计算结果 (pH)	解方程时间(s)	对 GCR 加速比	对 EGCR 加速比
49pin	GCR	49	533	61.05	61128))
	EGCR	49	160	61.06	61	11005)
	MEGCR	49	238	61.06	28142	2116	2115
30pin	GCR	30	285	21.43	26195))
	EGCR	30	97	21.43	21179	1124)
	MEGCR	30	98	21.42	10133	2147	2111
Pin2connect	GCR	35	175	81.17	10191))
	EGCR	35	105	81.17	26123	0142)
	MEGCR	35	107	81.17	7124	1151	3162

优于 EGCR, 其中, 对例子 pin2connect, 加速比达到了 31.62。图 2 给出了对于算例 pin2connect, 三种方法的计算时间随右端数增加的变化曲线。从图中可以看出, 当右端数增加时, EGCR 计算时间较其他两种方法增加最快, MEGCR 的增加则是最慢的。对于该算例, 当右端数为 35 时, EGCR 的计算时间为 GCR 的 2.41 倍, MEGCR 的 31.62 倍。

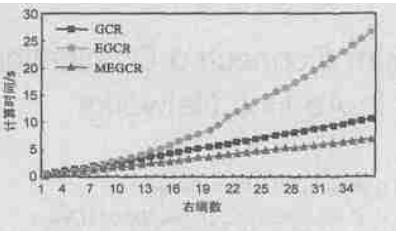


图 2 对 pin2connect 算例三种方法随右端数增加计算时间的变化曲线 (频率为 1GHz)

6.1.2 与 FastHenry 的比较

本节将 FIE 与 FastHenry 作比较。FastHenry 具有优秀的计算性能, 常被用作速度上的比较标准。FIE 在综合运用了多右端求解技术及改进非均匀立方体划分多极加速方法之后, 对 FastHenry 可有数十倍加速。我们选出 4 个实例, 其中 pin2connect 的结构如图 3 所示。导体的电导率为 51.8×10^7 , 频率为 1G。对于多端口对的三维互连结构, 计算结果为一个阻抗矩阵, 表 2 中的误差是指矩阵中与 FastHenry 相比的最大差别。从表 2 看出, FIE 与 FastHenry 计算结果符合的比较好, 最大误差为 31.03%。在速度上, FIE 明显优于

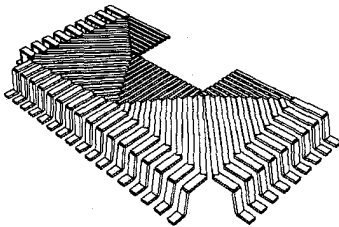


图 3 FastHenry 提供的算例 pin2connect

表 2 FIE 与 FastHenry 的比较(频率为 1GHz)

		变量数	右端数	迭代次数	时间(s)	误差	加速比
49pin	FastHenry	4900	49	536	122619	2149%	17180
	FIE	4900	49	240	68187		
Pin2con7	FastHenry	1920	7	108	131158	0170%	36186
	FIE	1920	7	42	3157		
Pin2connect	FastHenry	3270	35	174	481149	0156%	49180
	FIE	3270	35	107	9167		
30pin	FastHenry	3640	30	280	852169	3103%	31113
	FIE	3640	30	102	26154		

FastHenry. 对于例子 pin2connect, FIE 仅用 91.67 秒, 而 FastHenry 用了 4811.49 秒, 加速比达 491.80。

7 结论

本文应用 PEEC 模型求解 3D 互连寄生电感电阻中出现的多右端线性方程组。在种子投影方法 EGCR 的基础上, 提出了一种改进的 MEGCR 方法, 它通过有效限制扩大 Krylov 子空间所需正交化计算量, 继承了 EGCR 方法中通过扩大搜索空间加速迭代收敛速度的优点, 同时克服了由于其正交化时间随右端数增加而急剧增加的缺点, 显著加快了多右端方程组的求解速度。数值结果表明, 在可比精度下, 右端数约为 30 时, 本文方法比优秀的 FastHenry 快数十倍。

参考文献:

- [1] M Kamon, M Tsuk, C Smithisler, J White. FastHenry: A multipole accelerated 3D inductance extraction program [J]. IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques, 1994, Part 2: 1750- 1758.
- [2] A E Ruehli. Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor systems [J]. IEEE Trans On MTT, 1974, 22(3): 216- 221.
- [3] Charles F Smith, Andrew F Peterson, Raj Mitra. A conjugate gradient algorithm for the treatment of multiple incident electromagnetic fields [J]. IEEE Transactions On Antennas And Propagation, 1989, 37(11): 1490- 1493.
- [4] T Chan, W Wang. Analysis of projection methods for solving linear systems with multiple right hand sides [J]. SIAM J Sci Comput, 1997, 18: 1698- 1721.
- [5] F J Lingen. A generalized conjugate residual method for the solution of nonsymmetric systems of equations with multiple right hand sides [J]. International journal for numerical methods in engineering, 1999, 44: 641- 656.
- [6] Yang Zhaozhi, Wang Zeyi. A virtual 3D fast extractor for interconnect capacitance of multiple dielectrics [J]. Microelectronic Engineering, January 2003, 65(122): 133- 144.
- [7] S C Eisenstat, H C Elman, M H Schultz. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations [J]. SIAM J Numer Anal, April 1983, 20: 345- 357.

作者简介:



杨 柳 男, 1977 年出生于广西, 博士研究生, 现从事 VLSI 中 3D 互连寄生参数提取算法的研究。



郭小波 男, 1978 年 11 月出生于江西省南昌市, 硕士研究生, 现从事 VLSI 互连寄生参数提取的模型与数值算法的研究。